ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.929

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© М.Н. Жирнов

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для одного конкретного дифференциального уравнения с запаздыванием. Доказано, что при любом начальном условии задача Коши имеет единственное определенное на всей полуоси $[0,+\infty)$ решение.
Ключевые слова: задача Коши; дифференциальное уравнение с запаздыванием; однозначная разрешимость

Будем обозначать $\mathbb{R}$ − множество действительных чисел, $L([0,\tau],\mathbb{R})$ − банахово пространство суммируемых на отрезке $[0,\tau]$ функций с нормой $||y|| = \int_0^\tau |y(t)|dt$.

Рассматривается следующее дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = \ln\left(\left|x\left(\frac{t}{2}\right)\right| + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{t}}, t \geq 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Эта задача Коши равносильна уравнению

$$z(t) = \ln\left(\left|\alpha + \int_0^{t/2} z(s)ds\right| + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{t}}, t \geq 0 \tag{3}$$

относительно неизвестной функции z, являющейся производной решения уравнения (1). Заметим, что если решение z уравнения (2) существует, то для него выполнено неравенство $z(t) \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$. Вследствие этого неравенства будем рассматривать уравнение (2) на множестве

$$\tilde{L} = \left\{ z \in L([0,\tau],\mathbb{R}) \;\middle|\; z(t) \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \right\}.$$

На множестве $\tilde{L}$ определим метрику

$$\rho\,(z, y) = \big||z - y|\big| = \int_0^\tau |z(s) - y(s)| ds\,.$$

Относительно этой метрики $\tilde{L}$ становится полным пространством.

Для исследования уравнения (2) мы воспользуемся теоремой Банаха о сжимающем отображении (см. [1], с. 609). Таким образом, получим следующее утверждение.

Теорема. *Задача* (1), (2) *при любом значении* $\alpha \in \mathbb{R}$ *имеет единственное решение, определенное на всей полуоси* $[0, +\infty)$, *причем всякое локальное решение является частью этого глобального решения.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$(Fz)(t) = \ln\left(\left|\alpha + \int_0^{t/2} z(s) ds\right| + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{t}},$$

действующее в полном метрическом пространстве $\tilde{L}$. Покажем, что это отображение является сжимающим. Для этого найдем расстояние между образами Fz и Fy произвольных функций $z, y \in \tilde{L}$. Имеем

$$\rho\,(Fz, Fy) = \int_0^\tau \ln\left(\left|\alpha + \int_0^{t/2} z(s) ds\right| + 1\right) - \ln\left(\left|\alpha + \int_0^{t/2} y(s) ds\right| + 1\right) dt\,.$$

В силу теоремы Лагранжа о среднем (см. [2, с. 170]), существует такое значение $c \geq 1$ (эта оценка является следствием неравенства $a \leq c \leq$ $\leq b$, где значения $a = \left|\alpha + \int_0^{t/2} z(s) ds\right| + 1 \geq 1$, $b = \left|\alpha + \int_0^{t/2} y(s) ds\right| +$ $+ 1 \geq 1$), что

$$\rho\,(Fz, Fy) = \int_0^\tau \frac{1}{c}\left|\left|\alpha + \int_0^{t/2} z(s)ds\right| - \left|\alpha + \int_0^{t/2} y(s)ds\right|\right| dt \le$$

$$\le \int_0^\tau \int_0^{t/2} |z(s) - y(s)| ds dt \ \le \rho\,(z, y)\,\tau^2.$$

Таким образом, если $\tau < 1$, то отображение $F: \tilde{L} \to \tilde{L}$ действительно является сжатием. А это значит, что уравнение (3) (следовательно, и задача (1), (2)) имеет единственное решение $\tilde{x}\,(t)$ при $t \in [0, \tau]$.

Рассмотрим теперь уравнение (1) при $t \in [\tau, 2\tau]$ с начальным условием $x(\tau) = \tilde{x}\,(\tau)$. Решение такой задачи Коши будет продолжением решения $\tilde{x}$. Так как в данном случае $\frac{t}{2} \in \left[\frac{\tau}{2}, \tau\right] \subset [0, \tau]$, а решение при $t \in [0, \tau]$ уже найдено (мы его обозначили $\tilde{x}$), то на рассматриваемом промежутке дифференциальное уравнение записывается в виде

$$\dot{x}(t) = \ln\left(\left|\tilde{x}\left(\frac{t}{2}\right)\right| + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{t}},\ t \in [\tau, 2\tau].$$

Проинтегрировав функцию в правой части этого уравнения, получим решение на $[\tau, 2\tau]$.

Рассматривая последовательно уравнение (1) на отрезках $[2\tau, 4\tau]$, $[4\tau, 8\tau]$, $[8\tau, 16\tau]$ и т. д., получим единственное решение, определенное на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989. 736 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Жуковскому Евгению Семеновичу за помощь в написании статьи.

Поступила в редакцию 15.01.2018 г.
Отрецензирована 16.02.2018 г.
Принята в печать 19.03.2018 г.

Информация об авторе:
Жирнов Михаил Николаевич – магистрант по направлению подготовки «Математика». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: misha-zhirnoff@yandex.ru

CONDITIONS OF EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE DIFFERENTIAL EQUATION WITH DELAY

Zhirnov M.N., Master's Degree Student on Training Direction "Mathematics". Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: misha-zhirnoff@yandex.ru

Abstract. The Cauchy problem for one specific differential equation with delay is considered. It is proved that for any initial condition, the Cauchy problem has only one defined on the whole half-axis $[0,+\infty)$ solution.

Keywords: Cauchy problem; differential equation with delay; unique solvability

References

1. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 752 p. (In Russian).
2. Kudryavtsev L.D. *Kratkiy kurs matematicheskogo analiza* [A Short Course of Mathematical Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 736 p. (In Russian).

ACKNOWLEDGEMENTS: The author expresses his gratitude to the doctor of physical and mathematical sciences, Professor Zhukovsky Yevgeny Semenovich for the help in writing the article.

Received 15 January 2018
Reviewed 16 February 2018
Accepted for press 19 March 2018